Шифр:

С-32

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
математика
2018/2019
Ленинградская область

Район г. Сосновый Бор

Школа МБОУ „СОШ №2"

Класс 11 „А"

ФИО Цедилов Дмитрий Сергеевич

С-32

1	2	3	4	5	Σ
7	7	1	x	x	15

№ 11.1

Ответ: 8.

Решение:

1) Покажем, что никто не мог задумать число, меньшее 1. Действительно, если такой человек найдется, то в первом случае он соврёт, т.к. число, меньшее 1 не может быть больше 1, 2, 3, ..., 10. С другой стороны, во втором случае он обязательно скажет правду, т.к. число, меньшее 1, обязано быть меньше 1, 2, 3, ..., 10. Т.е. сперва он соврал, а затем сказал правду. Но это невозможно, т.к. эти 10 людей либо всегда врут, либо всегда говорят правду. Противоречие. Значит, никто не задумал числа, меньшее 1.

2) Покажем, что никто не мог задумать число, большее 10. Действительно, если такой человек найдется, то в первом случае он обязательно скажет правду, т.к. число больше 10 обязано быть больше 1, 2, 3, 4, ..., 10. С другой стороны, во втором случае он соврет, т.к. число большее 10 не может быть меньше 1, 2, 3, ..., 10. Т.е. сперва он сказал правду, а затем соврал. Но это

(продолжение)

невозможно, т.к. эти 10 людей либо всегда врут, либо всегда говорят правду. Противоречие. Значит, никто не задумал число, большее 10.

3) Покажем, что число 1 мог задумать только лжец. Действительно, в первом случае он обязательно соврет, т.к. 1 не больше 1, 2, 3, ..., 10. Значит, этот человек лжец, т.к. рыцари не врут.

4) Покажем, что число 10 мог задумать только лжец. Действительно, во втором случае он обязательно соврет, т.к. 10 не меньше 1, 2, 3, ..., 10. Значит, этот человек ~~лж~~ лжец, т.к. рыцари не врут.

5) Покажем, что общее количество рыцарей, ~~задумавши~~ каждый из которых задумал одно из ~~чисел~~ ~~чисел~~ чисел: либо 2, либо 3, либо 4, либо 5 не превосходит 4 (с учетом того, что разные рыцари могут задумать одинаковые числа). Действительно, каждый такой рыцарь мог сказать лишь одну из четырех фраз в первом случае: либо „Моё число больше 1", либо „Моё число больше 2", либо „Моё число больше 3", либо „Моё число больше 4", т.к. в остальных случаях рыцарь соврет, что невозможно. Т.к. возможных фраз всего 4, то и таких рыцарей не может быть больше 4.

6) Покажем что общее кол-во рыцарей, каждый из которых задумал одно из чисел: либо 6, либо 7, либо 8, либо 9 не превосходит 4. Действительно, каждый такой рыцарь мог сказать лишь одну из четырех фраз во втором случае: либо „Моё число меньше 10", либо „Моё число меньше 9", либо „Моё число меньше 8", либо „Моё число меньше 7",

№ 11.1
(продолжение)

т.е. в остальных случаях рыцарь соврет, что невозможно. Т.к. возможных фраз всего 4, то и таких рыцарей не может быть больше 4.

7) Из пп. 5 и 6 следует, что кол-во рыцарей, каждый из которых задумал ~~одно~~ число из ряда: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 не превосходит 8. Из пп. 3 и 4 следует, что числа 1 и 10 рыцарь загадать не мог. Из пп. 1 и 2 следует, что рыцарь не мог загадать число меньшее 1 или большее 10. Следовательно, среди данных 10 человек не больше 8 рыцарей. Осталось привести пример:

8) I человек задумал 1, II 2, III 3, ..., X 10.
I и X - лжецы, остальные - рыцари.
В первом случае I говорит: „Моё число больше 9", II: „Моё число больше 1", III: „Моё число больше 2", ..., IX: „Мое число больше 8", X: Мое число больше
Во втором случае I говорит: „Моё число меньше 1", II: „Мое число меньше 3", III: „Моё число меньше 4", ..., IX: „Мое число меньше 10", X: „Мое число меньше 2"

Ответ: 8.

см. след. стр.

C – 32

№ 11. 2

Пусть x_1, x_2 – корни многочлена x^2+ax+b (если у него всего один корень, то $x_1=x_2$).

По ~~ф~~ теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = b \\ x_1 + x_2 = -a \end{cases}$$

По условию, $x_1 \in \mathbb{Z}$, $x_2 \in \mathbb{Z}$, значит, $b \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}$ (произведение целых – целое, сумма целых – целое).

Дискриминант первого многочлена:

$D_1 = a^2-4b$

$$x_1 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

Т.к. x_1, x_2, $a \in \mathbb{Z}$, то $\sqrt{a^2-4b} \in \mathbb{Z}$, т.е.

$a^2-4b = \alpha^2$, где $\alpha \in \mathbb{Z}$ (1)

Дискриминант второго многочлена:

$D_2 = a^2-4(b+1) = a^2-4b-4$

Проведя аналогичные рассуждения, получим:

$a^2-4b-4 = \beta^2$, где $\beta \in \mathbb{Z}$ (2)

Вычтем из (1) (2):

$\alpha^2-\beta^2=4$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ (3)

Т.е. разность квадратов двух целых ~~чисел~~ равна 4 Д-м, что этими числами могут быть только числа $\alpha=2$ и $\beta=0$.

№ 11.2
(продолжение)

Начало последовательности квадратов целых чисел:

0, 1, 4, 9, 16, 25, ...

Очевидно, что при $\alpha, \beta \leq 5$ подходят только числа 4 и 0: $4-0=4$, т.е. $\alpha=2$, $\beta=0$.

Д-м, что разница δ между квадратами чисел $C+1$ и C при $C>2$ ($C \in \mathbb{N}$) больше 4:

$\delta=(C+1)^2-C^2=2C+1$

Если $C>2$, то $\delta=2C+1>5>4$, т.е.

$$\delta>4$$

$\blacksquare$

Значит, разница между последовательными квадратами целых чисел, больших 2, больше 4.

Следовательно, при $\alpha, \beta>2$ решений ур-я (3) не существует (очевидно, что если брать непоследовательные числа, то разница их квадратов будет еще больше).

Следовательно, решение $\alpha=2$ и $\beta=0$ единственно для ур-я 3. (Если брать $\beta \leq 2$, а $\alpha>2$, то решений, очевидно, тоже нет).

$a^2-4b-4=\beta^2=0$

$a^2-4b-4=0$

Дискриминант трехчлена $x^2+ax+b+2$:

$D_3=a^2-4(b+2)=a^2-4b-8=a^2-4b-4-4=0-4=-4<0$

Значит, трехчлен $x^2+ax+b+2$ не имеет корней. $\blacksquare$

С-32

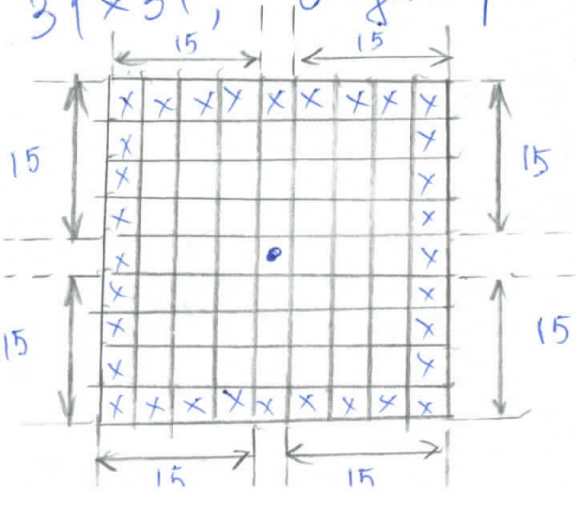
№ 11.3

<u>Лемма</u> Наименьшее кол-во ходов, за которое шахматный король может добраться от одной клетки до другой равно большей из двух величин: расстоянию от короля до клетки по горизонтали и расстоянию от короля до клетки по вертикали. (Расстояние между соседними клетками равно 1)

Действительно, за меньшее кол-во ходов король дойти до нужной клетки не сможет, т.к. за один ход можно приблизиться только на одну горизонталь и/или вертикаль, а чтобы добраться до нужной горизонтали/вертикали нужно пройти расстояние, равное расстоянию по горизонтали/вертикали.

Такого кол-ва ходов хватит, т.к. двигаясь по диагонали король одновременно приближается и по горизонтали, и по вертикали. И меньшее расстояние по одного из направлений можно пройти во время приближения к желаемой клетке по другому направлению (вертикали/горизонтали). ☒

Значит, любая выделенная клетка запрещает ~~став~~ выделять другие клетки на границе квадрата 31×31, в центре которого данная клетка:



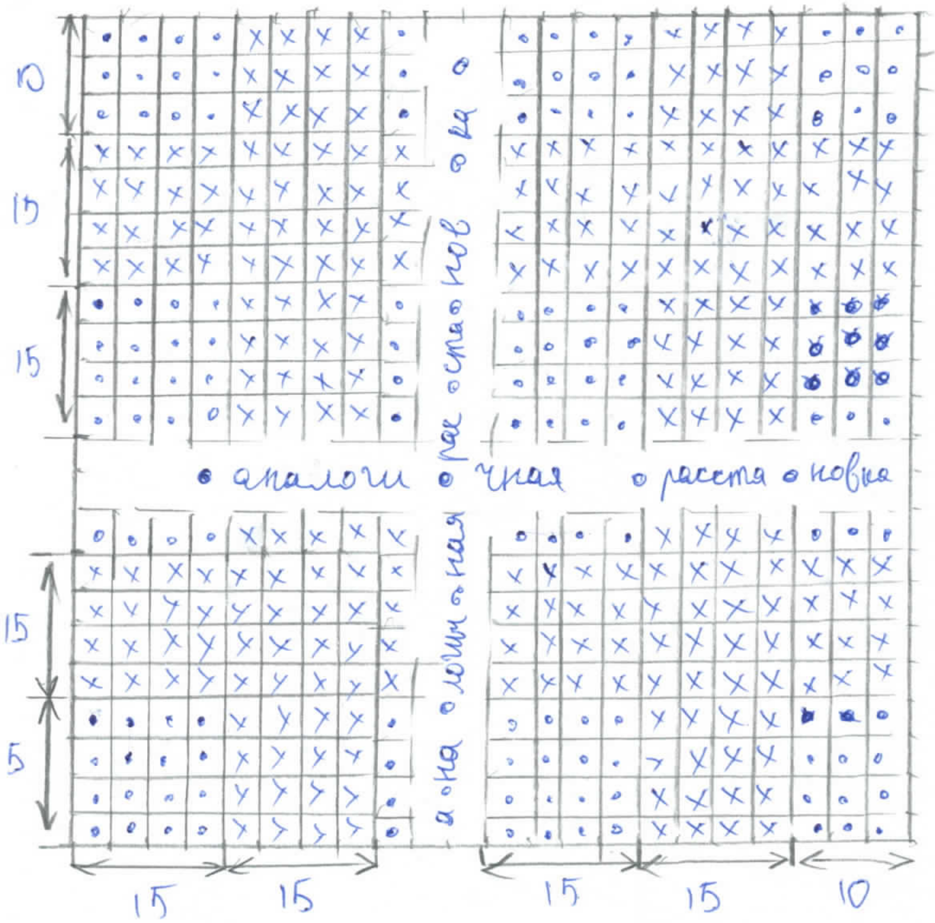
• - выделенная клетка

× - клетка, ~~куда~~ которую нельзя выделять, т.к. расстояние до нее от выделенной равно 15

№ 11.3
(продолжение)

Очевидно, для того чтобы выделенных клеток было как можно больше, их необходимо начинать выделять с края доски. Также для увеличения этого кол-ва разумно выделять все соседние клетки любой уже выделенной (если это возможно), т.к. в этом случае „запрещенная зона" (x) увеличивается меньше всего.

Руководствуясь этими принципами получаем следующую картинку:



$(15+15)3+10=100$

Всего отмеченных клеток:

$(3\cdot15^2+15\cdot10)3+3\cdot10\cdot15+10^2=$

$=(3\cdot225+150)3+450+100=$

$=(675+150)\cdot3+550=$

$=825\cdot3+550=2475+550=$

$=\boxed{3025}$

Ответ: 3025.

C-32

6	7	8	9	10	Σ
7	7	×	7	0	21

№11.6

Пусть наименьшее из этих чисел равно n. Тогда все эти числа можно записать в следующем виде: n; $n+1$; $n+2$; $n+3$, причем $n>100$ (по условию)

1) Если n - четное, то $n=2m$, где $m>50$, $m \in \mathbb{N}$

Возьмем три последних числа и посчитаем их сумму:

$(n+1)+(n+2)+(n+3)=3n+6=3(n+2)$ ⊜

Но $n=2m$:

⊜ $3(2m+2)=3\cdot 2\cdot (m+1)$

Т.к. $m>50$, то $m+1>51$, значит,

$m+1 \neq 2$

$m+1 \neq 3$

Итого: если n - четное, то мы доказали, что сумма трех последних чисел представляется в виде ~~на~~ произведения трех различных натуральных чисел: 2, 3 и $(m+1)$.

2) Если n - нечетное, то $n=2k-1$, где $k>50$, $k \in \mathbb{N}$

Возьмем три первых числа и посчитаем их сумму:

$n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)$ ⊜

Но $n=2k-1$:

⊜ $3(2k-1+1)=3\cdot 2\cdot k$

№ 11.6
(продолжение)

Т.к. $k > 50$, то

$k \neq 2$

$k \neq 3$

Итого: если n-нечетное, то мы доказали, что сумма трех первых чисел представляется в виде произведения трех различных натуральных чисел: 2; 3 и k.

■

Т.к. это все возможные случаи, то получается, что при любом n можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трех различных натуральных чисел, больших 1.

■

№ 11.7

Для того, чтобы доказать, что последовательность (x_n) убывает необходимо и достаточно доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верно, что $x_n > x_{n+1} \iff x_n - x_{n+1} > 0$. (Отсюда сразу же следует, что для любых $k \in \mathbb{N}$ и $l \in \mathbb{N}$, таких, что $k < l$, верно $x_k > x_l$. Для этого достаточно рассмотреть н-ва $x_k > x_{k+1} > k_{k+2} > x_{k+3} > \ldots > x_{l-2} > x_{l-1} > x_l$).

Итак, в нашем случае: (для любого n)

$x_n = 2^n \left(\sqrt[2^n]{a} - 1\right)$

$x_{n+1} = 2^{n+1} \left(\sqrt[2^{n+1}]{a} - 1\right)$

Рассмотрим x_n:

№ 11.7
(продолжение)

$x_n = 2^n\left(\sqrt[2^n]{a}-1\right) = 2^n\left(\sqrt[2^{n+1}]{a}-1\right)\left(\sqrt[2^{n+1}]{a}+1\right)$

Использована формула разности квадратов

$\left(\left(\sqrt[2^{n+1}]{a}\right)^2 = \sqrt[2^n]{a}\right)$

Рассмотрим x_{n+1}:

$x_{n+1} = 2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{a}-1\right) = 2\cdot 2^n\left(\sqrt[2^{n+1}]{a}-1\right)$

Разность $x_n - x_{n+1}$:

$x_n - x_{n+1} = 2^n\left(\sqrt[2^{n+1}]{a}-1\right)\left(\sqrt[2^{n+1}]{a}+1\right) - 2\cdot 2^n\left(\sqrt[2^{n+1}]{a}-1\right) =$

$= 2^n\left(\sqrt[2^{n+1}]{a}-1\right)\left(\sqrt[2^{n+1}]{a}+1-2\right) = 2^n\left(\sqrt[2^{n+1}]{a}-1\right)\left(\sqrt[2^{n+1}]{a}-1\right) = 2^n\left(\sqrt[2^{n+1}]{a}-1\right)^2 > 0$

для $\forall\ n$, т.к. $2^n > 0\ \forall\ n\in\mathbb{N}$ и $\left(\sqrt[2^n]{a}-1\right)^2 > 0\ \forall n\in\mathbb{N}$

т.к. $a\neq 1$ (а значит $\sqrt[2^{n+1}]{a}-1\neq 0\ \forall\ n\in\mathbb{N}$).

Итого: для $\forall\ n\in\mathbb{N}$ верно $x_n - x_{n+1} > 0$, т.е. $x_n > x_{n+1}$, а это и значит, что последовательность (x_n) убывает.

$\blacksquare$

№ 11.9

1) Очевидно, что в классе не может быть больше 30 учеников ($m\leq 30$), т.к. всего ~~возможно~~ существует лишь 30 возможных количеств посещений бассейна (1, 2, 3, ..., 30) за сентябрь (0 [ноль] раз никто не мог сходить, т.к. в этом случае не выполняется второе условие), а у каждого ученика уникальное кол-во посещений.

2) Никто не мог сходить 30 раз в этот бассейн (т.е. ежедневно), т.к. ~~в этом случае~~ для этого

ученика не найдется дня, в который он не был бассейне, а значит второе условие не выполнится. Значит, $m \leq 29$

3) Не может такого случится, что один ученик сходил всего лишь 1 раз в бассейн, а какой-то другой 29 раз, т.к. в тот день, когда ~~человек~~ ~~не~~ первый из них пошел в бассейн, никто другой не мог идти в этот бассейн (в противном случае не выполнилось бы второе условие задачи), а значит второй из них ходил в бассейн во все остальные дни. Но тогда ~~второй ходил~~ не найдется того дня, когда второго не было в бассейне, а кто-то третий там был, ведь этот третий не может идти в бассейн в тот единственный день, когда нет второго из-за первого.

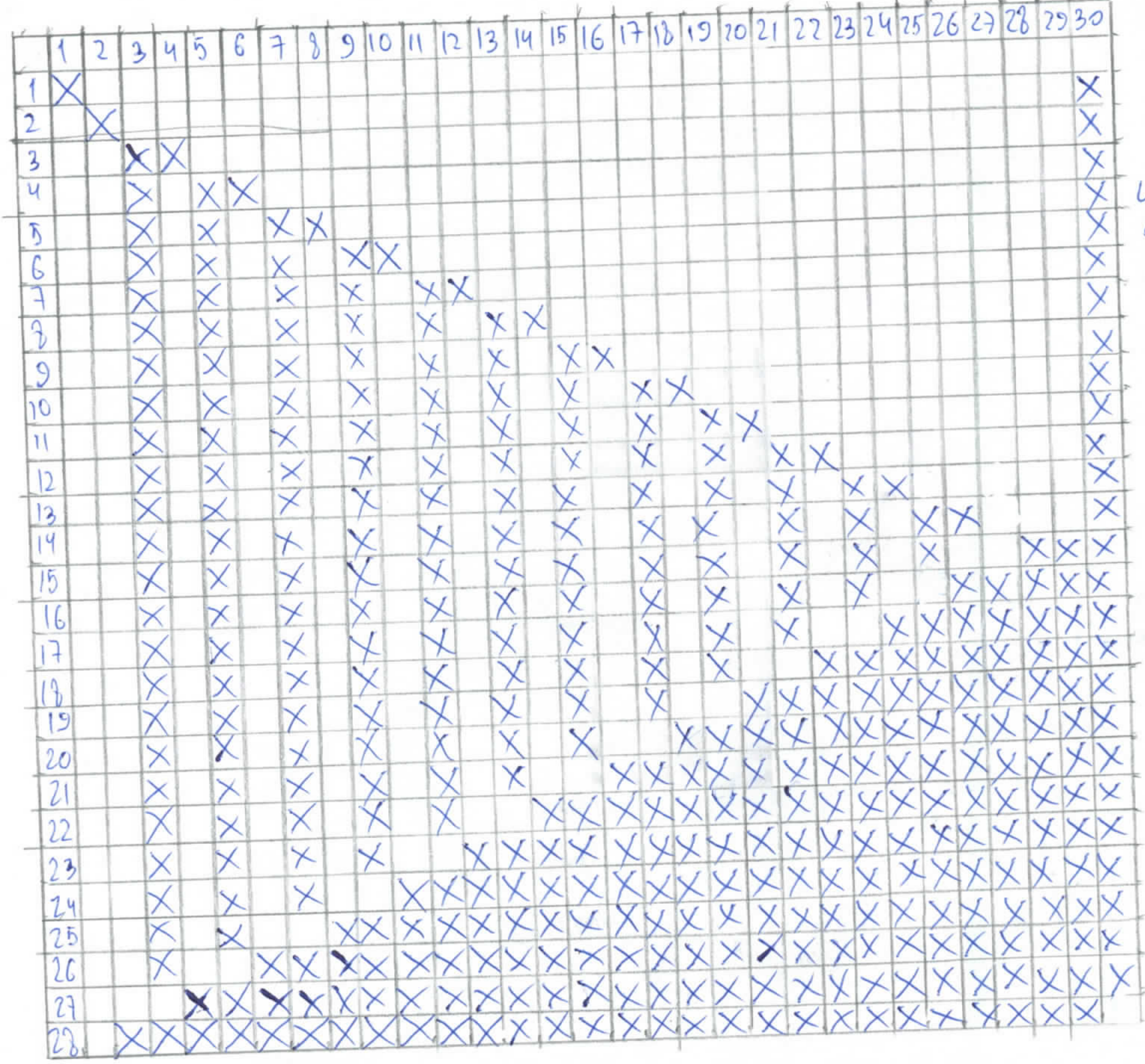
Т.е. одновременно двух таких учеников ~~одного~~ быть не может, а значит $m \leq 28$ (один из них вполне может быть в отсутствие второго)

Значит, наибольшее возможное ~~кол-в~~о значение m равно 28. Осталось привести пример.

4) Пример. В таблице указано какой ученик когда ходил в бассейн (всего учеников 28). Предполагается, что ученик под номером 1 ходил 1 раз в бассейн, ученик под номером 2 ходил 2 раза в бассейн и т.д.

см. след. стр.

Число (дата) № 11.9 (продолжение)



X – день, когда конкретный ученик пошел в бассейн

Ответ: 28.

№11.10

Ответ: $\frac{1}{(n+1)^2}$

Решение:

1) Д-м, что Петя всегда сможет подобрать такие числа $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$, что на доске окажется число $\frac{1}{(n+1)^2}$.

Д-во: Петя выбирает следующие числа: $(n-1)$ нулей и $(n+1)$ чисел, равных между собой, т.е. каждое из них равно $\frac{1}{n+1}$ (т.к. их сумма равна 1).

№ 11.10
(продолжение)

Как бы Вася не расставил все эти числа, всегда обязательно найдется ~~два~~ пара соседних чисел, каждое из которой равно $\frac{1}{n+1}$.

Действительно, ~~если Вася удастся сможет~~ чтобы „разделить" все числа $\frac{1}{n+1}$ друг от друга, необходимо, как минимум, такое же кол-во нулей, как и чисел $\frac{1}{n+1}$, т.е. $(n+1)$. Но у Васи в распоряжении всего лишь $n-1$ нуль, т.е. меньше, чем нужно, следовательно, ему это сделать не ~~удастся~~ получится. (При удачном „разделении" чисел $\frac{1}{n+1}$ друг от друга каждому такому числу можно подобрать свой нуль, идя, например, против часовой стрелки. А значит, количество чисел $\frac{1}{n+1}$ равно кол-во нулей (как минимум))

Ну а если такая пара найдется, то и наибольшее произведение будет равно $\frac{1}{(n+1)^2}$

Т.е. при любом n Петя сможет выбрать такие числа, что выписанное число будет равно $\frac{1}{(n+1)^2}$.

2) Д-м, что при любых выбранных Петей числах Вася всегда сможет расставить их так, что выписанное число будет не больше, чем $\frac{1}{(n+1)^2}$

а) Если среди выбранных чисел найдется как минимум n нулей, то Вася сможет расставить

№ 11.10
(продолжение)

Эти числа так, чтобы любое ненулевое число было окружено двумя нулями (согласно рассуждениям выше). Значит, все произведения будут равны 0 и выписанное число также будет равно 0.

Но $0 < \frac{1}{(n+1)^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

б) Пусть теперь среди выбранных чисел найдется не больше, чем $(n-1)$, нуль.

Обозначим кол-во нулей m.

$m \leq n-1$

Кол-во ненулевых чисел равно $2n - m \geq n+1 \geq 3$

Т.с. количество ненулевых чисел не меньше 3, значит сумма любых двух чисел меньше $\underline{1}$ (т.к. отрицательных чисел нет):

$x_k + x_l < 1$, $k, l \in \mathbb{N}$; $k, l \in [1; 2n]$

Н-во Коши о средних:

$$\frac{x_k + x_l}{2} \geq \sqrt{x_k x_l}$$

$$x_k x_l \leq \frac{(x_k + x_l)^2}{4} < \frac{1}{4}$$

$$x_k x_l < 0{,}25 \quad \forall \; k, l \in \mathbb{N}$$

(последняя стр.)